Convexité

Exo 2.1

1. Montrer que tout application $\|\cdot\|$ est convexe

$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ evn.

Dans la définition d'une norme :

$\forall x \in E \quad \|x\| \geq 0$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

On a l'inégalité triangulaire.

$\forall x, y \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

De plus c'est une inégalité stricte sauf si $y = \alpha x$ avec $\alpha \geq 0$

auquel cas

$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

On a donc de façon immédiate :

$\forall \alpha \in [0,1] \quad \|\alpha x + (1-\alpha) y\| \leq \alpha \|x\| + (1-\alpha) \|y\|$

On a aussi que la $\|\cdot\|$ n'est jamais strictement convexe.

Exo 2.2.

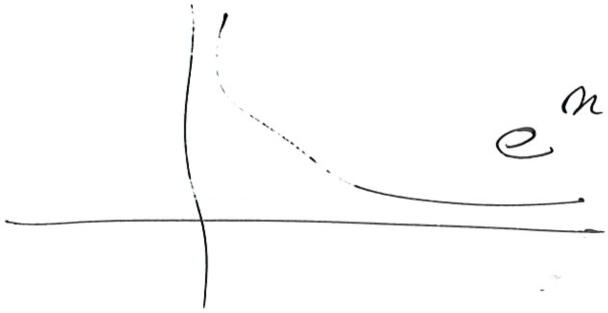
Pour quelles valeurs de p $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$x = (x_1, \dots, x_n) \to \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

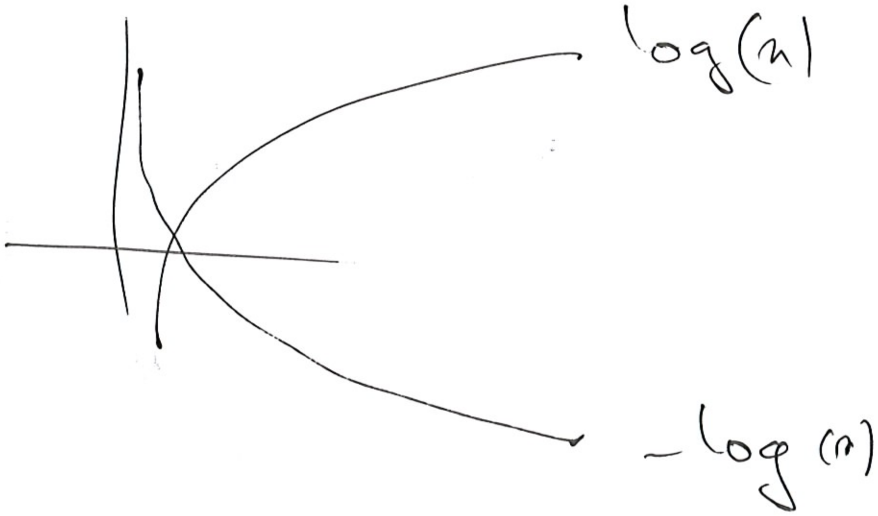
est-elle convexe ? Réponse aucune (cf. ci dessus).

2.3 Fonctions strictement convexes non coercives.
(càd $f(x) \not\to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$)

Exemple dans $\mathbb{R}^+$.



Fonction strictement convexes tq $f(x) \to -\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.



But de l'exo : Eviter que les étudiants pensent que les fonctions convexes c'est

2.4 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x = (x_1 \dots x_n)$

$$f(x) = e^{\|x\|_2^2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Or $f = f_2 \circ f_1$ $\quad x \xrightarrow{f_1} (x|x) = u \xrightarrow{f_2} e^u$

Lemme à montrer :

Si $h = h_2 \circ h_1$ et si h_1 convexe et h_2 convexe et monotone croissant alors. h convexe.

En effet $\forall \alpha \in [0,1]$, $\forall x, y$.

$$h_1(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha h_1(x) + (1-\alpha) h_1(y)$$

h_2 monotone croissant $\forall a, b \quad a \leq b \Rightarrow h(a) \leq h(b)$

$$h_2\left[h_1(\alpha x + (1-\alpha)y)\right] \underset{\text{monotonie de } h_2}{\leq} h_2\left[\alpha h_1(x) + (1-\alpha) h_1(y)\right]$$

$$\underset{\text{Convexité de } h_2}{\leq} \alpha h_2(h_1(x)) + (1-\alpha) h_2(h_1(y))$$

d'où $h_2 \circ h_1$ convexe.

Dans notre $f(x) = e^{\|x\|_2^2}$. e strictement convexe et monotone croissant. et $\|.\|$ convexe.

En fait en affinant le lemme ci-dessus on a même que f est strictement convexe..

Exo 2.5

$$f : E : C^1_{[0,1]} \times C^1_{[0,1]} \to \mathbb{R}.$$

$$x = (x_1, x_2) \longrightarrow f(x) = \int_0^1 \left(x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_1(t)\, x_2(t) \right) dt.$$

Or sur $C^1_{[0,1]}$ on prend $\forall x, y \in C^1_{[0,1]}$.

$$(x|y)_{C^1} = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt.$$

donc $f(x) = (x_1|x_1)_{C^1} + (x_2|x_2)_{C^1} + (x_2|x_1)_{C^1}$

Mais il y a mieux sur $C^1 \times C^1$ on prend abs. $\forall x, y \in C^1 \times C^1$

$x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$

$$(x|y)_{C^1 \times C^1} = \int_0^1 x_1(t)\, y_1(t) + x_2(t)\, y_2(t)\, dt$$

En fait on a que $f(x) = \frac{1}{2} (Ax | x)_{C^1 \times C^1}$

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c'est donc

une Quadratique ! $f''(x) \equiv A$

et comme $f''(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ det $A = 4 - 2 > 0$

$\Rightarrow$ v.p de même signe or Trace > 0 $\Rightarrow$ $f''(x)$ déf. pos

$\Rightarrow f$ strictement convexe.

Exo 2.6

$$(P) \quad \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \end{cases}$$

Le pb est-il différentiable ? c'à-d le domaine des contraintes convexe et la fonction objectif convexe dessus.

Soit $C = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 / \begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \end{matrix} \right\}$

C est l'intersection de 2 sphères (attention y'a les intérieur).

Soit $X_1 = (0, 1, 0, 0)$ et $X_2 = (0, 0, 1, 0)$

$X_1 \in C$ et $X_2 \in C$ or

$\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \notin C$!!

donc C pas convexe et pb pas convexe.

Exo 2.7

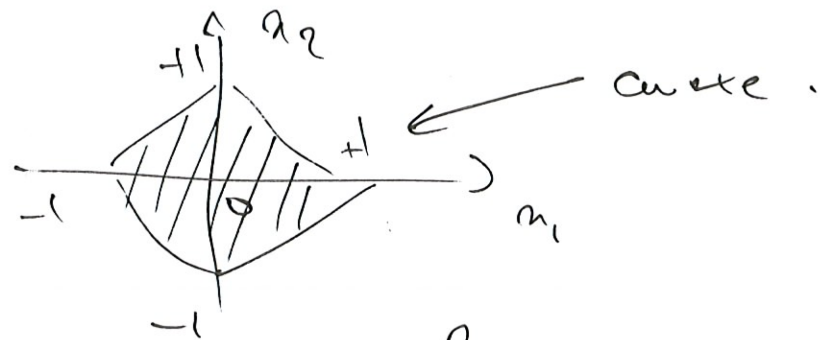
$$(P) \quad \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^4 + x_1 x_2) \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ |x_1| + |x_2| \leq 1 \end{cases}$$

. Pb différentiable i.e. fonction objectif et fonctions définissant les contraintes dérivables : réponse non car $|.|$ pas dérivable en 0 !

(P) pb convexe :

$C = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leq 1 \}$.

C :



Est-ce que f convexe sur C ?

$$f'(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 x_1 + x_2 \\ 4 x_2^3 + x_1 \end{pmatrix}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 x_2^2 \end{pmatrix}$$

Est ce que $f''(x)$ déf pos $\forall x \in C$?

$\det f''(x) = \frac{1}{4}(24 x_2^2 - 1)$ pas > 0 $\forall x$ dans C

On a même en $(0,0)$ $\det f''(0,0) = -\frac{1}{4}$.

donc indéfinie. (car 2 v.p. de signes différents)

$\Rightarrow f$ pas convexe (convexe $\Leftrightarrow$ semi déf)

Le pb n'est pas convexe.

⚠ On peut mettre le pb sous forme d'un pb équivalent qui a toutes les bonnes propriétés

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^4 + x_1 x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 1 \quad x_1 - x_2 \leq 1 \quad -x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \end{array} \right. \quad \text{diff} + \text{convexe}.$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.\quad f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\beta_i x_i} \quad \alpha_i, \beta_i \in$

le convexe ?

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 e^{\beta_1 x_1} \\ \vdots \\ \alpha_n \beta_n e^{\beta_n x_n} \end{pmatrix}$$

$$) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1^2 e^{\beta_1 x_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \beta_n^2 e^{\beta_n x_n} \end{pmatrix}$$

sur la diagonale.

v.p. f convexe $\Leftrightarrow$ $f_1''(x)$ semi déf positive.

$\alpha_i \beta_i^2 e^{\beta_i x_i} \geq 0$

$\alpha_i = 0$ β_i qcq $i = 1, n$.

$\Leftrightarrow$ $\alpha_i > 0$ β_i qcq

$\Leftrightarrow$ $\beta_i = 0$ α_i qcq.

$\Leftrightarrow$