2ème Année TR
Travaux dirigés d'OPTIMISATION

1 Dérivation

1.1 Exercice

Donner la dérivée première de la fonction

$$f : \Re^2 \rightarrow \Re^3$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \left\{ \begin{array}{c} x\ cosy \\ y\ sinx \\ x\ y \end{array} \right\}$$

1.2 Exercice

1. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que l'application : $f \rightarrow \|x\| \in \Re$ n'est jamais dérivable à l'origine.
2. Montrer que si $X = \Re^n$ et $\|.\| = \|.\|_2$, l'application f est dérivable dans $\Omega = \Re^n - \{0\}$, et que :

$$f'(a).h = \frac{\sum_{i=1}^n a_i h_i}{\|a\|_2}$$

en tout point $a = \{a_i\}$ dans Ω, pour tout vecteur $h = \{h_i\} \in \Re^n$.

1.3 Exercice

Soit $f : \Re^3 \rightarrow \Re$ et $x = (x_1, x_2, x_3)$. On définit :

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 4 \qquad (1)$$

1. Mettre la fonction sous la forme d'une quadratique :

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c \qquad (2)$$

où A est une matrice symétrique, b un vecteur et c un scalaire.

2. Montrer que cette forme quadratique est deux fois dérivable sur $\Re^n$ et calculer $f'(x)$ et $f"(x)$ $\forall x \in \Re^3$ en fonction de A, b, c.

1.4 Exercice

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, H un espace de Hilbert, f et g deux applications dérivables, respectivement de E dans H et de F dans H. Soit :

$$\begin{aligned} h : E \times F &\rightarrow \Re && (3) \\ (x, y) &\rightarrow h(x, y) = \|f(x) - g(y)\|_H^2 && (4) \end{aligned}$$

   Montrer que h est dérivable sur $E \times F$ et donner les expressions de $h'(x, y)$, $\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$, et $\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}$.

2. Application

   - $E = (\Re^2, \|.\|_1), F = (\Re^2, \|.\|_\infty), H = (\Re^2, \|.\|_2)$
   - $f : x \rightarrow f(x) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2) \quad x = (x_1, x_2)$
   - $g : y \rightarrow g(y) = (-y_1^2 - y_2^2, y_1^2 + y_2^2) \quad y = (y_1, y_2)$

1.5 Exercice

Soient E et F deux espaces de Hilbert. Soit $A \in L(E, F), b \in F$. Soit :

$$\begin{aligned} F : E &\rightarrow \Re && (5) \\ x &\rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_F^2 && (6) \end{aligned}$$

Montrer que f est deux fois dérivable sur E et donner les expressions de $f'(x)$ et $f"(x)$ $\forall x \in E$.

1.6 Exercice

Soient E un espace de Hilbert et $f : E \rightarrow E$, deux fois dérivable. Soit :

$$\begin{aligned} F : E &\rightarrow \Re && (7) \\ x &\rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\|f(x)\|_E^2 && (8) \end{aligned}$$

1. Montrer que F est deux fois dérivable sur E. Calculer $F'(x)$ et $F"(x)$ $\forall x \in E$ en fonction de $f'(x)$ et $f"(x)$.

2. Application :

$$\begin{aligned} E &= (\Re^3, (.|.)) && (9) \\ x &= (x_1, x_2, x_3) && (10) \\ f(x) &= ((x_1 + x_2)^2, (x_2 + x_3)^2, (x_1 + x_3)^2) && (11) \end{aligned}$$

1.7 Exercice

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Soit f une fonction de $H_1 \times H_2 \to \Re$, deux fois dérivable. On identifie H_i à $L(H_i, \Re)$ par Riesz $\forall i = 1, 2$. On considère alors :

$$\begin{aligned} h : H_1 \times H_2 &\to \Re && (12) \\ x = (x_1, x_2) &\to h(x) = \frac{1}{2}(\|\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\|_1^2 + \|\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\|_2^2) && (13) \end{aligned}$$

1. Montrer que h est dérivable sur tout $H_1 \times H_2$.

2. Donner l'expression de $h'(x) \quad \forall x \in H_1 \times H_2$.

1.8 Exercice

Soit $C^1([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continûment dérivables sur $[0, 1]$ avec pour norme :

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|$$

où $x \in C^1([0, 1])$ et $x'(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t}$.

Soit $C([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$ normé par :

$$\|y\|_0 = \max_{t\in[0,1]} |y(t)| \quad y \in C([0, 1])$$

1. Etudier la dérivabilité sur $C^1([0, 1])$ de la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : C^1([0, 1]) &\to C([0, 1]) && (14) \\ x &\to f(x) = 1 + x'^2 && (15) \end{aligned}$$

   c'est à dire $\forall t \in [0, 1] \quad (f(x))(t) = 1 + x'^2(t)$.

2. Donner l'expression de la dérivée de f aux points où elle est dérivable.

1.9 Exercice

Soit H un espace de Hilbert, $A \in L(H, H)$ symétrique, $b \in H$ et x une application deux fois dérivable de $\Re \to H$. On considère alors l'application :

$$\begin{aligned} f : \Re &\to \Re && (16) \\ t &\to f(t) = \frac{1}{2}(Ax(t)|x(t))_H - (b|x(t))_H && (17) \end{aligned}$$

Etudier la dérivabilité seconde de f, en donnant s'il y a lieu, les expressions des dérivées premières et secondes.

2 Convexité

2.1 Exercice

Soit E un espace vectoriel sur $\Re$.

1. Montrer que toute application norme définie sur E est convexe.
2. Soient f et g deux application convexes sur C un convexe de E. Montrer que $\forall \lambda \geq 0, \forall \mu \geq 0, \quad \lambda f + \mu g$ est une application convexe sur C.
3. Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'applications convexex sur C un convexe de E. Montrer que $f = \sup_{i \in I} f_i$ est une application convexe sur C.

2.2 Exercice

Pour quelles valeurs de $p, p \in \Re, p \geq 1$, les normes

$$\begin{cases} \|.\|_p : \Re^n \to \Re \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

sont-elles strictement convexes ?

2.3 Exercice

Pensez-vous qu'il existe des fonctions strictement convexes non-coercives ? Pensez-vous qu'il existe des fonctions f strictement convexes et telles que

$$\begin{cases} f(x) \to -\infty \\ \|x\| \to +\infty \end{cases}$$

2.4 Exercice

La fonction

$$\begin{array}{l} f : \Re^n \to \Re \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f_2(x) = e^{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \end{array}$$

est-elle convexe sur $\Re^n$? Il pourra être utile de vérifier le lemme suivant :

Si $h = h_2 \circ h_1$ et si h_1 convexe et h_2 convexe et monotone croissante sur $\Re^n$ alors h est convexe.

2.5 Exercice

Soit f la fonctionnelle suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : E = C^1([0,1]) \times C^1([0,1]) & \to & \Re \\ x = (x_1, x_2) & \to & f(x) = \int_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_1(t)x_2(t))dt \end{array}$$

1. Etudier la dérivabilité seconde de f.

2. f est-elle convexe sur E ? Si oui, est-elle strictement convexe sur E ?

2.6 Exercice

Soit le problème d'optimisation :

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\min f(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\\ x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\Re^4\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\\ x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\end{array}\right.$$

1. (P) est-il un problème d'optimisation différentiable ?

2. (P) est-il un problème d'optimisation convexe ?

2.7 Exercice

Soit le problème d'optimisation :

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\min f(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^4+x_1x_2)\\ x=(x_1,x_2)\in\Re^2\\ |x_1|+|x_2|\leq 1\end{array}\right.$$

1. (P) est-il un problème d'optimisation différentiable ?

2. (P) est-il un problème d'optimisation convexe ?

2.8 Exercice

1. Donner une CNS sur $(\alpha,\beta,a,b)\in\Re^4$ pour que la fonction $f:\Re\to\Re$ avec $f(x)=ae^{\alpha x}+be^{\beta x}$ soit convexe sur $\Re$.

2. Donner une CNS sur $(a,b,c)\in\Re^3$ pour que la fonction $g:\Re^2\to\Re$ avec $g(x)=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$ soit convexe sur $\Re^2$.

2.9 Exercice

La fonction suivante :

$$\begin{array}{l}f_1:\Re^n\to\Re\\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to f_1(x)=\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\beta_i x_i}\quad \alpha_i\in\Re,\beta_i\in\Re,\forall i=1,n\end{array}$$

est-elle convexe ?

3 Problèmes d'optimisation sans contrainte

3.1 Exercice

Soit la fonction $f : \Re^2 \to \Re$, $f(x) = 3x_1x_2 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2$ avec $x = (x_1, x_2)$.

Résoudre les deux problèmes

$$\min_{x\in\Re^2} f(x) \quad \text{et} \quad \max_{x\in\Re^2} f(x)$$

3.2 Exercice

Soit la fonction $f : \Re^2 \to \Re$, $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$ avec $x = (x_1, x_2)$.

Résoudre les deux problèmes

$$\min_{x\in\Re^2} f(x) \quad \text{et} \quad \max_{x\in\Re^2} f(x)$$

3.3 Exercice

Soit la fonction $f : \Re^2 \to \Re$, $f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_1 + 3x_2$ avec $x = (x_1, x_2)$.

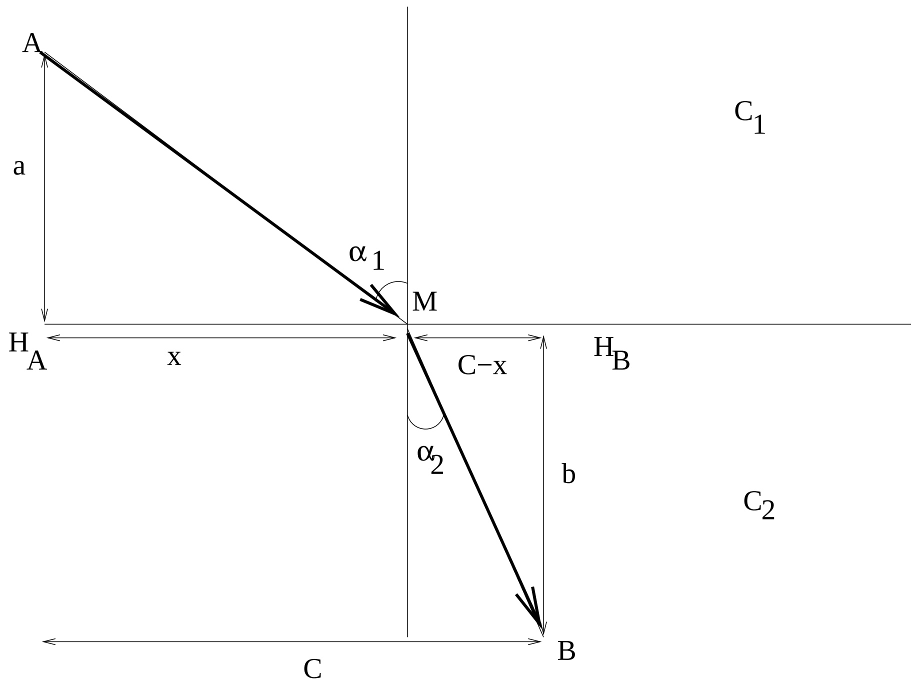
Résoudre les deux problèmes

$$\min_{x\in\Re^2} f(x) \quad \text{et} \quad \max_{x\in\Re^2} f(x)$$

3.4 Exercice

La trajectoire d'un rayon lumineux d'un point A vers un point B respecte le principe de Fermat : le trajet est celui pour lequel le temps de parcours est minimum. La vitesse dans le milieu 1 (resp.2) étant C_1 (resp. C_2) retrouver la loi de Snell-Descartes : $\frac{sin\alpha_1}{sin\alpha_2} = \frac{C_1}{C_2}$

En adoptant les notations du schéma 3.4, exprimer le temps de parcours $T(x)$ de A à a B en fonction de a, b, C_1, C_2, C et x. Le problème revient alors à trouver x minimisant $T(x)$. et résoudre.


A
a
α1
M
C1
HA
x
C−x
HB
α2
b
C2
B
C

4 Problèmes avec contraintes d'égalité

4.1 Exercice

1. Soit le problème d'optimisation sans contrainte (P_1) suivant :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} Min/Max \quad f(x,y) = x^2 + y^3 + 2xy \\ (x,y)^T \in \Re^2 \end{array} \right. \tag{18}$$

   (a) Que pouvez-vous dire du point de vue existence et unicité de des solutions globales ?

   (b) Etudier les solutions locales du problème et conclure

2. Soit le problème d'optimisation (P_2) avec contrainte suivant :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} Min/Max \quad f(x,y) = x^2 + y^3 + 2xy \\ (x,y)^T \in \Re^2 \\ h(x,y) = 3x + 3y - 2 = 0 \end{array} \right. \tag{19}$$

   (a) Que pouvez-vous dire du point de vue existence et unicité de des solutions globales ?

   (b) Etudier les solutions locales du problème et conclure.

4.2 Exercice

Soit le problème d'optimisation avec contraintes (P) suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = \frac{1}{2}((x_1 - 1)^2 + x_2^2) \\ x = (x_1, x_2)^T \in \Re^2 \\ h(x) = -x_1 + \beta x_2^2 = 0 \end{array} \right. \tag{20}$$

(a) Représenter géométriquement les équipotentielles associées à la fonction f ainsi que la contrainte.

(b) Déterminer l'ensemble des valeurs β pour lesquelles $x^* = (0,0)^T$ est un minimum local.

4.3 Exercice

Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \Re^3 \\ h_1(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0 \\ h_2(x) = x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0 \end{array} \right. \tag{21}$$

(a) Mettre ce problème sous la forme générique d'un problème quadratique à contraintes linéaires :

$$\min q(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c \text{ avec } C^T x = d \tag{22}$$

Ecrire la caractérisation de la solution.

(b) Utiliser une méthode de substitution-élimination des variables dans les contraintes pour résoudre ce problème. Dans le détail, on déterminera :

$$x = (X_1, X_2)^T \text{ avec } X_1 = (x_1, x_2)^T, X_2 = (x_3) \tag{23}$$

et la partition induite sur A, b et C de façon à se ramener à un problème équivalent ne faisant intervenir que la variable x_3.

(c) Généraliser pour $\Re^n$ avec n quelconque.

4.4 Exercice

Le système linéaire $Mz = n$ où $z \in \Re^5$ défini par :

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{et } n = (3, 2, -1, 5, 6)^T, \tag{24}$$

traduit une CNS de solution d'un problème d'optimisation quadratique à contraintes linéaires.

(a) Retrouver ce problème.

(b) Montrer qu'il s'agit bien d'une CNS.

4.5 Exercice

Soient f et h deux applications définies par : $f : \Re^n \to \Re$ et $h : \Re^n \to \Re$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - i)^2 \text{ et } h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \tag{25}$$

(a) Montrer que le problème (P) : $\min f(x), x \in \Re^n$tq $h(x) = 0$ admet une solution unique x^*.

(b) Caractériser x^*.

(c) Expliciter x^* en fonction de n.

4.6 Exercice

Soit E l'espace euclidien $(\Re^n, (.|.)), n \in N^*$. Soit $a = (1, 1, \ldots, 1)^T$, résoudre le problème :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 \\ x \geq 0, x \in \Re^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases} \tag{26}$$

(a) Montrer que le problème admet une solution unique x^*.

(b) Caractériser x^*.

(c) Donner x^* en fonction de n.

4.7 Exercice

Soit le problème d'optimisation avec contraintes (P) suivant :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases} \tag{27}$$

(a) Etudier l'existence des solutions de (P).

(b) Calculer les solutions s'il y en a.

4.8 Exercice

On se propose de résoudre le problème suivant :
Quel(s) est (sont) le (les) parallélépipèdes de volume maximum parmi ceux d'aire latérale donnée $a > 0$?

(a) Formuler ce problème comme un problème d'optimisation (P) avec contraintes d'égalité.

(b) Etudier l'existence des solutions de (P).

(c) Calculer les solutions s'il y en a.

4.9 Exercice

Enumérer, s'il y a lieu, toutes les solutions globales et solutions locales du problème d'optimisation :

$$(P) \begin{cases} min f(x) = x_1 x_2^2 x_3^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{28}$$